線形代数学 理解度確認 演習問題

12: 固有値と固有ベクトル			講義日: 月 日
学科名	学年	学籍番号	氏 名
☐ 機械システム工学科 ☐ その他(科)	年		

問1: 次の行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ と，各固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ．なお，実数の固有値が存在しない場合は，「解なし」と回答せよ．

(1) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

行列 $\mathbf{A}$ の固有方程式は以下の通りである．

$$|\mathbf{A}-\lambda \boldsymbol{E}|=0$$

$$\begin{vmatrix}8-\lambda & 1\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$$

整理すると，以下のような λ に関する 2 次方程式になる．

$$(8-\lambda)(5-\lambda)-1\cdot 4=0$$

$$\lambda^2-13\lambda+36=0$$

$$(\lambda-4)(\lambda-9)=0$$

したがって，

$$\lambda=4,\quad 9$$

次に算出した各固有値 λ に対して，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を算出する．

$\lambda=4$ のとき，

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix}8-4 & 1\\ 4 & 5-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}4 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{array}\right)\underset{①}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{1}{4} & 0\\ 4 & 1 & 0\end{array}\right)\underset{②}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

① 第 1 行を $\frac{1}{4}$ 倍する．

② 第 1 行の−4 倍を第 2 行に加える．

よって，

$$x_1+\frac{1}{4}x_2=0$$

x_1 を 0 以外の任意定数 c_1 と置くと，

$$x_1=c_1\ ,\ x_2=-4c_1$$

したがって，$\lambda=4$ のとき，$\boldsymbol{x}=c_1\begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix}$

$\lambda = 9$ のとき,

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} 8-9 & 1 \\ 4 & 5-9 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{①}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{②}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

① 第 1 行を -1 倍する.

② 第 1 行の -4 倍を第 2 行に加える.

よって,

$$x_1 - x_2 = 0$$

x_2 を 0 以外の任意定数 c_2 と置くと,

$$x_1 = c_2 \ , \ x_2 = c_2$$

したがって, $\lambda = 9$ のとき, $\boldsymbol{x} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c_1, c_2 を 0 以外の任意定数とすると,

$\lambda = 4$ のとき, $\boldsymbol{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

答 $\lambda = 9$ のとき, $\boldsymbol{x} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

なお, $c_1 = c_2 = 1$ など置くことにより, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ および $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ のように固定値として求めても良い.

(2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

行列 $\mathbf{A}$ の固有方程式は以下の通りである.

$$|\mathbf{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

整理すると, 以下のような λ に関する 2 次方程式になる.

$$(5-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot (-2) = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

したがって,

$$\lambda = 3$$

次に算出した固有値 λ に対して, 固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を算出する.

$\lambda = 3$ のとき，

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 5-3 & 2 \\ -2 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{①}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{②}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

① 第 1 行を $\frac{1}{2}$ 倍する．

② 第 1 行の 2 倍を第 2 行に加える．

よって，

$$x_1 + x_2 = 0$$

x_1 を 0 以外の任意定数 c と置くと，

$$x_1 = c,\ x_2 = -c$$

したがって，$\lambda = 3$ のとき，$\boldsymbol{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c を 0 以外の任意定数とすると，

答　$\lambda = 3$ のとき，$\boldsymbol{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

なお，$c = 1$ など置くことにより，固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ のように固定値として求めても良い．

(3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$

行列 $\mathbf{A}$ の固有方程式は以下の通りである．

$$|\mathbf{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{\pi}{3} - \lambda & -\cos\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

整理すると，以下のような λ に関する 2 次方程式になる．

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1 = 0$$

解の公式より，

$$\lambda = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$$

固有方程式の解が虚数であることから，実数の固有値は存在しない．

よって，解なし．

答　解なし

(4) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

行列 $\mathbf{A}$ の固有方程式は以下の通りである．

$$|\mathbf{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 4-\lambda & 1\\ -1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

整理すると，

$$(3-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)+1\cdot0\cdot0+(-1)\cdot1\cdot0-\{0\cdot(4-\lambda)\cdot(-1)\}-\{1\cdot0\cdot(3-\lambda)\}-(2-\lambda)\cdot1\cdot0=0$$

$$(3-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)=0$$

したがって，以下のような λ に関する 3 次方程式になる．

$$\lambda=2,3,4$$

次に算出した各固有値 λ に対して，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を算出する．

$\lambda=2$ のとき，

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix}3-2 & 0 & 0\\ 1 & 4-2 & 1\\ -1 & 0 & 2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\underset{①}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\underset{②}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\underset{③}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

① 第 1 行の −1 を第 2 行に加える．

② 第 1 行を第 3 行に加える．

③ 第 2 行を $\frac{1}{2}$ 倍する．

よって，

$$\begin{cases}x_1=0\\ x_2+\dfrac{1}{2}x_3=0\end{cases}$$

x_2 を 0 以外の任意定数 c_1 と置くと，

$$x_1=0\ ,\ x_3=-2c_1$$

したがって，$\lambda=2$ のとき，$\boldsymbol{x}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$

$\lambda=3$ のとき，

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix}3-3 & 0 & 0\\ 1 & 4-3 & 1\\ -1 & 0 & 2-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{①}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{②}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{③}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

① 第 1 行と第 3 行を入れ替える.

② 第 1 行を −1 倍する.

③ 第 1 行の −1 倍を第 2 行に加える.

よって,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

x_1 を 0 以外の任意定数 c_2 と置くと,

$$x_2 = 0,\ x_3 = -c_2$$

したがって, $\lambda = 3$ のとき, $\boldsymbol{x} = c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 4$ のとき,

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3-4 & 0 & 0 \\ 1 & 4-4 & 1 \\ -1 & 0 & 2-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{①}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{②}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{③}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{④}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

① 第 1 行を-1倍する.

② 第 1 行の -1 倍を第 2 行に加える.

③ 第 1 行の 1 倍を第 3 行に加える.

④ 第 2 行の 2 倍を第 3 行に加える

よって,

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

よって

$x_1 = 0$, x_2 は, 0 以外のすべての実数をとりうる, $x_3 = 0$

したがって, c_3を 0 以外の任意定数とすると, $\lambda = 4$ のとき, $\boldsymbol{x} = c_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c_1, c_2, c_3 を 0 以外の任意定数とすると

$\lambda = 2$のとき, $\boldsymbol{x} = c_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$のとき, $\boldsymbol{x} = c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 4$のとき, $\boldsymbol{x} = c_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

答

なお，$c_1 = c_2 = c_3 = 1$ など置くことにより，固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ および $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ のように固定値として求めても良い．

(5) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

行列 $\mathbf{A}$ の固有方程式は以下の通りである．

$$|\mathbf{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$$
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 5 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

第 2 列に関する余因子展開を用いると，以下のような λ に関する 3 次方程式になる．

$$0 \cdot \Delta_{1,2} + (1-\lambda) \cdot \Delta_{2,2} + 0 \cdot \Delta_{3,2} = 0$$

$$(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4) = 0$$

したがって，

$$\lambda = 1,\ 3,\ 4$$

次に算出した各固有値 λ に対して，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を算出する．

$\lambda = 1$ のとき，

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$
$$\begin{bmatrix} 2-1 & 0 & -2 \\ 5 & 1-1 & -3 \\ 1 & 0 & 5-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{④} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{⑤} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

① 第 1 行の－5 倍を第 2 行に加える．

② 第 1 行の－1 倍を第 3 行に加える．

③ 第 2 行を $\frac{1}{7}$ 倍する．

④ 第 2 行の 2 倍を第 1 行に加える．

⑤ 第 2 行の -6 倍を第 3 行に加える．

よって，

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 0$，x_2 は，0 以外のすべての実数をとりうる，$x_3 = 0$

したがって，c_1を 0 以外の任意定数とすると，$\lambda = 1$ のとき，$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$ のとき，

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$
$$\begin{bmatrix} 2-3 & 0 & -2 \\ 5 & 1-3 & -3 \\ 1 & 0 & 5-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{①}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{②}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{③}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{④}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

① 第 1 行を −1 倍する．

② 第 1 行の −5 倍を第 2 行に加える．

③ 第 1 行の −1 倍を第 3 行に加える．

④ 第 2 行を −2 倍する．

よって，

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + \dfrac{13}{2} x_3 = 0 \end{cases}$$

x_3 を 0 以外の任意定数 c_2 と置くと，

$$x_1 = -2c_2 \ , \ x_2 = -\tfrac{13}{2} c_2$$

したがって，$\lambda = 3$ のとき，$\boldsymbol{x} = c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{13}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 4$ のとき，

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$
$$\begin{bmatrix} 2-4 & 0 & -2 \\ 5 & 1-4 & -3 \\ 1 & 0 & 5-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 5 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{①}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{②}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{③}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{④}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

① 第 1 行と第 3 行を入れ替える．

② 第 1 行の −5 倍を第 2 行に加える.

③ 第 1 行の 2 倍を第 3 行に加える.

④ 第 2 行を $-\frac{1}{3}$倍する.

よって,

$$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2+\dfrac{8}{3}x_3=0 \end{cases}$$

x_3 を 0 以外の任意定数 c_3 と置くと,

$$x_1=-c_3 \ , \ x_2=-\frac{8}{3}c_3$$

したがって, $\lambda=4$ のとき, $\boldsymbol{x}=c_3\begin{bmatrix}-1\\-\frac{8}{3}\\1\end{bmatrix}$

c_1,c_2,c_3 を 0 以外の任意定数とすると,

$\lambda=1$ のとき, $\boldsymbol{x}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$\lambda=3$ のとき, $\boldsymbol{x}=c_2\begin{bmatrix}-2\\-\frac{13}{2}\\1\end{bmatrix}$

$\lambda=4$ のとき, $\boldsymbol{x}=c_3\begin{bmatrix}-1\\-\frac{8}{3}\\1\end{bmatrix}$

答

なお, $c_1=c_2=c_3=1$ など置くことにより, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ および $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2\\-\frac{13}{2}\\1\end{bmatrix}$ および $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1\\-\frac{8}{3}\\1\end{bmatrix}$ の

ように固定値として求めても良い.