線形代数学 理解度確認 演習問題

11： 行列と一次変換			講義日：　　月　　日
学科名	学年	学籍番号	氏　名
□ 機械システム工学科 □ その他（　　　　　科）	年		

問1： 次の点が回転移動した後の点の座標を求めよ.

(1) 点 $(2,-3)$ を原点を中心に, $\frac{\pi}{4}$ 回転移動させた点の座標

求める座標を (X, Y) とすると,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

答　$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(2) 点 $(a,\ b)$ を原点を中心に, $\frac{5\pi}{6}$ 回転移動させた点の座標

求める座標を (X, Y) とすると,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}a - b}{2} \\ \frac{a - \sqrt{3}b}{2} \end{pmatrix}$$

答　$\left(\frac{-\sqrt{3}a-b}{2},\ \frac{a-\sqrt{3}b}{2}\right)$

(3) 点 $(4,\ 5)$ を点 $(3,\ 4)$ を中心に, $\frac{\pi}{2}$ 回転させた点の座標

求める座標を (X, Y) とする.

まず, 点 $(3,\ 4)$ を原点に移す平行移動により,

点 $(4,\ 5)$ が移される点 $(x',\ y')$ を求める.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

次に, 原点の周りに点 $(x',\ y')$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転させた点 $(X',\ Y')$ を求める.

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

最後に, 求めた点 $(X',\ Y')$ を平行移動させ, 点 (X, Y) を求める.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

答　$(2,\ 5)$

問2：次の行列 $\mathbf{A}$ を求めよ．

(1)　$(0,\ 1)$ を $(-1,\ 1)$ に，$(1,\ 0)$ を $(3,\ 4)$ に移す 1 次変換行列 $\mathbf{A}$

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．　この一次変換行列は，

$(0,\ 1)$ を $(-1,\ 1)$ に移すことから，

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　　　$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

したがって，　$b=-1,\ d=1$

同様に，$(1,\ 0)$ を $(3,\ 4)$ に移すことから，

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$　　　$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

したがって，　$a=3,\ c=4$

よって $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

答　　$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　$(8,\ 2)$ を $(18,\ 78)$ に，$(-2,\ 2)$ を $(-2, -12)$ に移す 1 次変換行列 $\mathbf{A}$

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．この一次変換行列は，

$(8,\ 2)$ を $(18,\ 78)$ に移すことから，

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 \\ 78 \end{pmatrix}$　　　$\begin{pmatrix} 8a+2b \\ 8c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 \\ 78 \end{pmatrix}$

したがって，

$$\begin{cases} 4a+b=9 & \ldots① \\ 4c+d=39 & \ldots② \end{cases}$$

同様に，$(-2,\ 2)$ を $(-2, -12)$ に移すことから，

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -12 \end{pmatrix}$　　　$\begin{pmatrix} -2a+2b \\ -2c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -12 \end{pmatrix}$

したがって，

$$\begin{cases} a-b=1 & \ldots③ \\ c-d=6 & \ldots④ \end{cases}$$

以上の①～④の連立方程式を解いて $a,\ b,\ c,\ d$ を求める．

式①，③の連立方程式を解くと，$a=2$, $\mathrm{b}=1$

式②，④の連立方程式を解くと，$c=9,\ d=3$

したがって $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

答　　$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

問3：次の方程式を求めよ.

(1) 直線 $4x+2y+3=0$ を原点を中心に, $\frac{\pi}{6}$ 回転した直線の方程式

点 (x,y) を原点中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転した点を (X,Y) とする.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ とおくと,

$\boldsymbol{R}$ の逆行列を用いて与式を (x,y) に関する式に変形する.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y \\ -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y \\ y = -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \end{cases}$$

これを $4x+2y+3=0$ に代入すると,

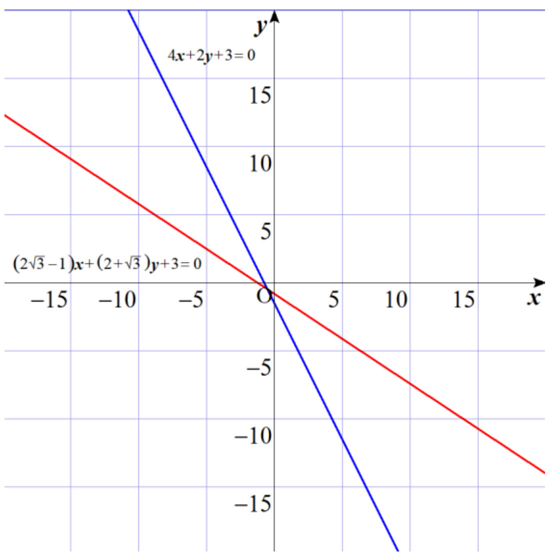
$$4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right) + 3 = 0$$

$$2\sqrt{3}X + 2Y - X + \sqrt{3}Y + 3 = 0$$

$$(2\sqrt{3}-1)X + (2+\sqrt{3})Y + 3 = 0$$

したがって,

$$(2\sqrt{3}-1)x + (2+\sqrt{3})y + 3 = 0$$



青線：回転前　　赤線：回転後

図1. 問3(1)における直線の方程式の描画結果

答　$(2\sqrt{3}-1)x + (2+\sqrt{3})y + 3 = 0$

(2)　曲線 $x^2+\sqrt{3}x+y^2-y=7$ を原点を中心に，$\frac{\pi}{3}$ 回転した曲線の方程式

点 (x,y) を原点中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転した点を (X,Y) とする.

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{R}$ の逆行列を用いて与式を (x,y) に関する式に変形する.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\end{pmatrix}$$

したがって，

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\end{cases}$$

これを $x^2+\sqrt{3}x+y^2-y=7$ に代入すると，

$$\left(\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2+\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)^2-1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\right)=7$$

両辺を整理すると，

$$\frac{1}{4}X^2+\frac{3}{4}Y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}XY+\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{3}{2}Y+\frac{3}{4}X^2+\frac{1}{4}Y^2-\frac{\sqrt{3}}{2}XY+\frac{\sqrt{3}}{2}X-\frac{1}{2}Y=7$$

$X^2+Y^2+\sqrt{3}X+Y=7$

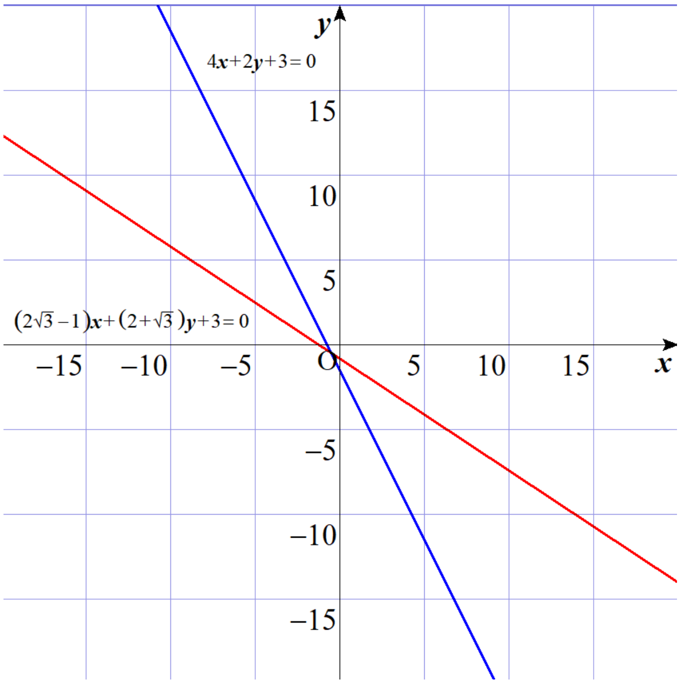
したがって，

$x^2+\sqrt{3}x+y^2+y=7$

答　$x^2+\sqrt{3}x+y^2+y=7$

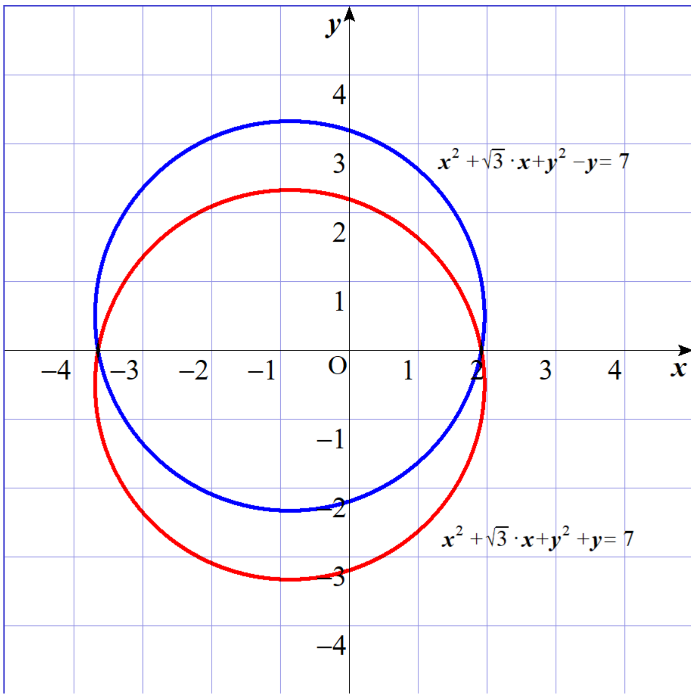
【補足資料】

問 3 において各方程式を描画すると，以下の図のようになる.



青線：回転前　　赤線：回転後

図1. 問3(1)における直線の方程式の描画結果



青線：回転前　　赤線：回転後

図2. 問3(2)における曲線の方程式の描画結果