線形代数学　理解度確認　演習問題

10：余因子展開			講義日：　　　月　　　日
学科名	学年	学籍番号	氏　名
□ 機械システム工学科 □ その他（　　　　　科）	年		

問 1：行列 $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 1\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ の余因子をすべて計算せよ.

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}|A_{11}|=(-1)^2\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=0-3=-3$$

$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}|A_{12}|=(-1)^3\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-1(0-3)=3$$

$$\Delta_{13}=(-1)^{1+3}|A_{13}|=(-1)^4\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=12+3=15$$

$$\Delta_{21}=(-1)^{2+1}|A_{21}|=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-1(0-6)=6$$

$$\Delta_{22}=(-1)^{2+2}|A_{22}|=(-1)^4\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=0-6=-6$$

$$\Delta_{23}=(-1)^{2+3}|A_{23}|=(-1)^5\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-1(12-3)=-9$$

$$\Delta_{31}=(-1)^{3+1}|A_{31}|=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1+2=3$$

$$\Delta_{32}=(-1)^{3+2}|A_{32}|=(-1)^5\begin{vmatrix}4 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-1(4-8)=4$$

$$\Delta_{33}=(-1)^{3+3}|A_{33}|=(-1)^6\begin{vmatrix}4 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-4-4=-8$$

答　$\Delta_{11}=-3$　$\Delta_{12}=3$　$\Delta_{13}=15$
$\Delta_{21}=6$　$\Delta_{22}=-6$　$\Delta_{23}=-9$
$\Delta_{31}=3$　$\Delta_{32}=4$　$\Delta_{33}=-8$

問 2：行列 $A=\begin{pmatrix}3 & 8 & 5\\ 5 & 1 & -2\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ を以下の方法で求めよ.

（1）第 1 行に関する余因子展開

第 1 行に関する余因子展開は，

$$|A|=a_{11}\Delta_{11}+a_{12}\Delta_{12}+a_{13}\Delta_{13}$$

によって求めることができる.

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}|A_{11}|=(-1)^2\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-3-0=-3$$

$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}|A_{12}|=(-1)^3\begin{vmatrix}5 & -2\\ 6 & -3\end{vmatrix}=-1(-15+12)=3$$

$$\Delta_{13}=(-1)^{1+3}|A_{13}|=(-1)^4\begin{vmatrix}5 & 1\\ 6 & 0\end{vmatrix}=0-6=-6$$

$|A| = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = 3\cdot(-3) + 8\cdot 3 + 5\cdot(-6) = -9 + 24 - 30 = -15$

答　$|A| = -15$

(2)　第 3 行に関する余因子展開

第 3 行に関する余因子展開は,

$$|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$$

によって求めることができる.

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}|A_{31}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -16 - 5 = -21$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}|A_{32}| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 - 25) = 31$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}|A_{33}| = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 40 = -37$$

$|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33} = 6\cdot(-21) + 0\cdot 31 + (-3)\cdot(-37) = -15$

答　$|A| = -15$

(3)　第 2 列に関する余因子展開

第 2 列に関する余因子展開は,

$$|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$$

によって求めることができる.

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}| = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 12) = 3$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}|A_{22}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 30 = -39$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}|A_{32}| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 - 25) = 31$$

$|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32} = 8\cdot 3 + 1\cdot(-39) + 0\cdot 31 = -15$

答　$|A| = -15$

問 3:余因子展開を用いて以下の行列式を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

第 2 列に関する余因子展開は,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$$

によって求めることができる.

ここで, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 0$ より $a_{12}\Delta_{12} = 0$, $a_{22}\Delta_{22} = 0$ となるので, $a_{32}\Delta_{32}$ について求めればよい.

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}|A_{32}| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-5 - 3) = 8$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32} = 0 + 0 + 5\cdot 8 = 40$$

答　$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 40$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

第 2 列に関する余因子展開は,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$$

によって求めることができる.

ここで, $a_{22} = 0$, $a_{32} = 0$ より $a_{22}\Delta_{22} = 0$, $a_{32}\Delta_{32} = 0$ となるので, $a_{12}\Delta_{12}$ について求めればよい.

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}|\mathrm{A}_{12}| = (-1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -(16+6) = -22$

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} = 5 \cdot (-22) = -110$

答 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -110$

問 4:余因子を用いて行列 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

Aの逆行列A^{-1}は, 教科書の p.83 の公式から,

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\,{}^{t}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$$

によって求めることができる.

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}|\mathrm{A}_{11}| = (-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}|\mathrm{A}_{12}| = (-1)^3\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4$

$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}|\mathrm{A}_{13}| = (-1)^4\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2$

$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}|\mathrm{A}_{21}| = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3$

$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}|\mathrm{A}_{22}| = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$

$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}|\mathrm{A}_{23}| = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1$

$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}|\mathrm{A}_{31}| = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}|\mathrm{A}_{32}| = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2$

$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}|\mathrm{A}_{33}| = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$

第 2 行に関する余因子展開は,

$$|\mathrm{A}| = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23}$$

によって求めることができる.

$|\mathrm{A}| = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} = (-2)\cdot 3 + 0 + 0 = -6$

したがって,

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\,{}^t\!\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6}\,{}^t\!\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = {}^t\!\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

答 $\mathrm{A}^{-1} = {}^t\!\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$