線形代数学　理解度確認　演習問題

08：　正則行列			講義日：　　　　月　　　　日
学科名	学年	学籍番号	氏　名
□　機械システム工学科 □　その他（　　　　　　　科）	年		

問1：次の行列について，P.61 の例題または P.62 の公式を用いて逆行列を求めよ．

（逆行列が求まらない場合はその理由も答えよ．）

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{①}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{②}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{③}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

①　第 2 行の−2 倍を第 1 行に加える．

②　第 1 行を−1 倍する．

③　第 1 行の−2 倍を第 2 行に加える．

したがって，$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

答　$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{①}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

①　第 1 行の−2 倍を第 2 行に加える．

したがって，$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ は正則ではないため，逆行列が存在しない．

（P.62 の公式を用いた別解）

$$2 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 0$$

$\therefore$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ は正則でないため，逆行列は存在しない．

答　$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ は正則ではないため，逆行列は存在しない．

(3) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{①}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{②}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{③}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -5 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{④}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 8 & 1 \end{array}\right) \underset{⑤}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{⑥}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&5&1\\0&1&3&3&-5&0\\0&0&1&-1&3&1\end{array}\right)\underset{⑦}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&5&1\\0&1&0&6&-14&-3\\0&0&1&-1&3&1\end{array}\right)$$

① 第 2 行の−2 倍を第 1 行に加える.

② 第 1 行を−1 倍する.

③ 第 1 行の−3 倍を第 2 行に加える.

④ 第 1 行の 4 倍を第 3 行に加える.

⑤ 第 2 行を第 3 行に加える.

⑥ 第 3 行を第 1 行に加える.

⑦ 第 3 行の−3 倍を第 2 行に加える.

したがって, $\begin{pmatrix}5&2&1\\3&1&0\\-4&-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&5&1\\6&-14&-3\\-1&3&1\end{pmatrix}$

答 $\begin{pmatrix}5&2&1\\3&1&0\\-4&-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&5&1\\6&-14&-3\\-1&3&1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}2&2&-6\\6&6&-18\\0&3&5\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-6&1&0&0\\6&6&-18&0&1&0\\0&3&5&0&0&1\end{array}\right)\underset{①}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-6&1&0&0\\0&0&0&-3&1&0\\0&3&5&0&0&1\end{array}\right)$$

① 第 1 行の−3 倍を第 2 行に加える.

したがって, $\begin{pmatrix}2&2&-6\\6&6&-18\\0&3&5\end{pmatrix}$ は正則でないため, 逆行列が存在しない.

答 $\begin{pmatrix}2&2&-6\\6&6&-18\\0&3&5\end{pmatrix}$ は正則でないため, 逆行列は存在しない.

問 2: $\begin{pmatrix}a&0&b\\c&0&d\\e&f&g\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ. ただし, すべての変数は 0 以外の実数かつ $ad-bc\neq 0$ である.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}a&0&b&1&0&0\\c&0&d&0&1&0\\e&f&g&0&0&1\end{array}\right)\underset{①}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{b}{a}&\frac{1}{a}&0&0\\c&0&d&0&1&0\\e&f&g&0&0&1\end{array}\right)\underset{②}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{b}{a}&\frac{1}{a}&0&0\\0&0&\frac{ad-bc}{a}&-\frac{c}{a}&1&0\\e&f&g&0&0&1\end{array}\right)\underset{③}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{b}{a}&\frac{1}{a}&0&0\\e&f&g&0&0&1\\0&0&\frac{ad-bc}{a}&-\frac{c}{a}&1&0\end{array}\right)\underset{④}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{b}{a}&\frac{1}{a}&0&0\\0&f&\frac{ag-be}{a}&-\frac{e}{a}&0&1\\0&0&\frac{ad-bc}{a}&-\frac{c}{a}&1&0\end{array}\right)\underset{⑤}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{b}{a}&\frac{1}{a}&0&0\\0&1&\frac{ag-be}{af}&-\frac{e}{af}&0&\frac{1}{f}\\0&0&\frac{ad-bc}{a}&-\frac{c}{a}&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{⑥}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{ag-be}{af} & -\frac{e}{af} & 0 & \frac{1}{f} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{⑦}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{ag-be}{af} & -\frac{e}{af} & 0 & \frac{1}{f} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{⑧}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{cg-de}{f(ad-bc)} & -\frac{ag-be}{f(ad-bc)} & \frac{1}{f} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 \end{array}\right)$$

① 第 1 行を $\frac{1}{a}$ 倍する.

② 第 1 行の $-c$ 倍を第 2 行に加える.

③ 第 2 行と第 3 行を入れ替える.

④ 第 1 行の $-e$ 倍を第 2 行に加える.

⑤ 第 2 行を $\frac{1}{f}$ 倍する.

⑥ 第 3 行を $\frac{a}{ad-bc}$ 倍する.

⑦ 第 3 行の $-\frac{b}{a}$ 倍を第 1 行に加える .

⑧ 第 3 行の $-\frac{ag-be}{af}$ 倍を第 2 行に加える.

答 $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ e & f & g \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{f(ad-bc)}\begin{pmatrix} df & -bf & 0 \\ cg-de & be-ag & ad-bc \\ -cf & af & 0 \end{pmatrix}$