

線形代数学 理解度確認 問題用紙

行列・ベクトル計算ドリル			講義日: 月 日
学科名	学年	学籍番号	氏 名
<input type="checkbox"/> 機械システム工学科			
<input type="checkbox"/> その他(科)	年		

このドリルはすべて記述問題です。標準解答時間は 80 分で、本講義内での解答時間は 50 分となっています。
 なお、この問題用紙は期末テスト後に回収する可能性があります。

問1: ベクトル $\mathbf{a} = (3, 5)^T$, $\mathbf{b} = (4, -1)^T$, $\mathbf{c} = (-4, 8)^T$ に対して、次のベクトルを計算せよ。

(1) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$

$$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{c} = (3, 5)^T + (8, -2)^T - (-8, 16)^T = (19, -13)^T$$

答 $(19, -13)^T$

(2) $-\mathbf{a} + \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$

$$-\mathbf{a} + \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c} = -(3, 5)^T + (4, -1)^T - (-2, 4)^T = (3, -10)^T$$

答 $(3, -10)^T$

(3) $4\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$

$$4\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = (12, 20)^T + (4, -1)^T - (-8, 16)^T = (24, 3)^T$$

答 $(24, 3)^T$

問2: ベクトル $\mathbf{a} = (3, 1, -1)^T$, $\mathbf{b} = (-3, 3, 5)^T$, $\mathbf{c} = (0, -2, 3)^T$ に対して、次のベクトルを計算せよ。

(1) $-\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$

$$-\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c} = -(3, 1, -1)^T + (-6, 6, 10)^T - (0, -2, 3)^T = (-9, 7, 8)^T$$

答 $(-9, 7, 8)^T$

(2) $2\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$

$$2\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = (6, 2, -2)^T + (-3, 3, 5)^T - (0, -4, 6)^T = (3, 9, -3)^T$$

答 $(3, 9, -3)^T$

(3) $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$

$$3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c} = (9, 3, -3)^T + (-6, 6, 10)^T - (0, -2, 3)^T = (3, 11, 4)^T$$

答 $(3, 11, 4)^T$

問3: 次の方程式をみたす 3次元ベクトル x を求めよ.

$$(1) \quad (-3, 1, -4)^T + x = (9, 1, -5)^T$$
$$x = (9, 1, -5)^T - (-3, 1, -4)^T = (12, 0, -1)^T$$

答 $x = (12, 0, -1)^T$

$$(2) \quad x + (1, -4, 3)^T = (5, 6, -1)^T - x$$
$$2x = (5, 6, -1)^T - (1, -4, 3)^T = (4, 10, -4)^T \text{ なので}$$
$$x = (2, 5, -2)^T$$

答 $x = (2, 5, -2)^T$

$$(3) \quad (-5, -4, 6)^T + 2x = (1, 14, 3)^T - x$$
$$3x = (1, 14, 3)^T - (-5, -4, 6)^T = (6, 18, -3)^T \text{ なので}$$
$$x = (2, 6, -1)^T$$

答 $x = (2, 6, -1)^T$

問4: 次のベクトル a の大きさ(ノルム)を求めよ.

$$(1) \quad a = (3, -7, \sqrt{6})^T$$
$$|a| = \sqrt{3^2 + (-7)^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{64} = 8$$

答 8

$$(2) \quad a = (2\sqrt{14}, 3, 4)^T$$
$$|a| = \sqrt{(2\sqrt{14})^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$$

答 9

$$(3) \quad a = (-6, 3, 6)^T$$
$$|a| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$$

答 9

問5: 次のベクトル a, b の内積 (a, b) を求めよ.

$$(1) \quad a = (3, 1, 4)^T, b = (-2, -7, 3)^T$$
$$(a, b) = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-7) + 4 \cdot 3 = -1$$

答 -1

$$(2) \quad a = (3, 9, 11)^T, b = (5, -1, 3)^T$$
$$(a, b) = 3 \cdot 5 + 9 \cdot (-1) + 11 \cdot 3 = 39$$

答 39

$$(3) \quad a = (3, 2, 6)^T, b = (-2, 5, -1)^T$$
$$(a, b) = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) = -2$$

答 -2

問6: 次の等式をみたす x, y, z の値を求めよ. ただし, 解が存在しない場合は, 解なしと記載すること.

$$(1) \begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ y & 3 \end{pmatrix}$$

両辺の行列の各成分を比較する.

(1, 1) 成分, (2, 1) 成分, (2, 2) 成分をそれぞれ比較して,

$$x = 2, y = 1, z = 3$$

答 $x = 2, y = 1, z = 3$

$$(2) \begin{pmatrix} x & 12 & 4 \\ 3 & z & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & y \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

両辺の行列の各成分を比較する.

(1, 1) 成分, (1, 3) 成分, (2, 2) 成分をそれぞれ比較して,

$$x = 5, y = 4, z = 2$$

答 $x = 5, y = 4, z = 2$

$$(3) \begin{pmatrix} 5 & 3+x & 14 \\ 5 & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & x+13 \\ 5 & 3 & 2x+2 \end{pmatrix}$$

両辺の行列の各成分を比較する.

(1, 2) 成分, (2, 2) 成分, (2, 3) 成分をそれぞれ比較して,

$$3+x=4, y=3, z=2x+2 \text{ よって } x=1, y=3, z=4$$

答 $x = 1, y = 3, z = 4$

$$(4) \begin{pmatrix} 10 & x & x+z \\ 5 & y+3 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 22 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

両辺の行列の各成分を比較する.

(1, 2) 成分, (1, 3) 成分, (2, 2) 成分, (2, 3) 成分をそれぞれ比較して,

$$x=4, x+z=22, y+3=5, z=7 \text{ よって } x = \text{解なし}, y = \text{解なし}, z = 7$$

答 $x = y = \text{解なし}, z = 7$

問7: 次の計算をせよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5-4 & 4+2 \\ 3-1 & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$(2) \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7-3 & 1-4 \\ -6+10 & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} -10 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -7 & -10 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3+6 & -4+3 \\ 1-7 & 5-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$

$$(4) \begin{pmatrix} -23 & 5 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 11 & -8 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -23+14 & 5-2 \\ -1+11 & -7-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}$

$$(5) \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 5-2 & 12+8 \\ -7-3 & 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 3 & 20 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$

$$(6) \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 10 & -23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -13 & -6 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2-2 & 5+1 \\ 10+13 & -23+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 23 & -17 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 23 & -17 \end{pmatrix}$

$$(7) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ -7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3+4 & 2+6 & 3-3 \\ 4-7 & 10-2 & -7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -3 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

$$(8) \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -12 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 6-3 & 1+12 & -5+3 \\ -2-1 & 8-3 & -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 & -2 \\ -3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 3 & 13 & -2 \\ -3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

$$(9) 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 & 4 & 13 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -3 & 9 \\ 6 & 12 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 & 26 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & -3+8 & 9+26 \\ 6-6 & 12+4 & 21+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 35 \\ 0 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\text{答} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 35 \\ 0 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

$$(10) 3 \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -28 \\ 4 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 40 \\ -15 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-8+10 & 15+28+40 \\ 12-4-15 & -12-32+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 83 \\ -7 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\text{答} \quad \begin{pmatrix} -1 & 83 \\ -7 & -19 \end{pmatrix}$$

$$(11) 2 \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 24 \\ 15 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ 16 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-9-8 & 12-24+20 \\ -4-15-16 & -6+12-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -35 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{答} \quad \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -35 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(12) 5 \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 35 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -14 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-9-12 & 35+3+14 \\ 5-4-8 & -15-5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 52 \\ -7 & -26 \end{pmatrix}$$

$$\text{答} \quad \begin{pmatrix} -6 & 52 \\ -7 & -26 \end{pmatrix}$$

$$(13) 5 \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 7 & -3 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -4 & -2 & 8 \\ 5 & 4 & -9 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 25 & -10 \\ -5 & 20 & 20 \\ 35 & -15 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -8 & -4 & 16 \\ 10 & 8 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 & 12 & 24 \\ 3 & -9 & 24 \\ 9 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15-4+9 & 25+10-12 & -10-8-24 \\ -5-8-3 & 20-4+9 & 20+16-24 \\ 35+10-9 & -15+8-0 & 15-18-27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 23 & -42 \\ -16 & 25 & 12 \\ 36 & -7 & -30 \end{pmatrix}$$

$$\text{答} \quad \begin{pmatrix} 20 & 23 & -42 \\ -16 & 25 & 12 \\ 36 & -7 & -30 \end{pmatrix}$$

問8: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 2 & -9 & 6 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ のとき, 次の計算をせよ.

(1) $3\mathbf{A}$

$$= 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-5) & 3 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -15 & -21 \end{pmatrix}$$

答 $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -15 & -21 \end{pmatrix}}}$

(2) $-5\mathbf{B}$

$$= -5 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 3 & -5 \cdot 0 \\ -5 \cdot 4 & -5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ -20 & 5 \end{pmatrix}$$

答 $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ -20 & 5 \end{pmatrix}}}$

(3) $-\frac{1}{3}\mathbf{C}$

$$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \cdot 3 & -\frac{1}{3} \cdot (-15) \\ -\frac{1}{3} \cdot 12 & -\frac{1}{3} \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

答 $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}}}$

(4) $3\mathbf{F}$

$$= 3 \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 2 & -9 & 6 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-5) & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-9) & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot (-6) & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -6 & 18 \\ 6 & -27 & 18 \\ -6 & -18 & -3 \end{pmatrix}$$

答 $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -15 & -6 & 18 \\ 6 & -27 & 18 \\ -6 & -18 & -3 \end{pmatrix}}}$

(5) $5\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - 2\mathbf{C}$

$$= 5 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot (-5) & 5 \cdot (-7) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-15) \\ 2 \cdot 12 & 2 \cdot (-6) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -25 & -35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -30 \\ 24 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+9-6 & 5+0+30 \\ -25+12-24 & -35-3+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 35 \\ -37 & -26 \end{pmatrix}$$

答 $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 13 & 35 \\ -37 & -26 \end{pmatrix}}}$

$$(6) -4\mathbf{A} - 7\mathbf{B} - 6\mathbf{C} + 2(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C})$$

$$= -4\mathbf{A} - 7\mathbf{B} - 6\mathbf{C} + 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C} = -2\mathbf{A} - 5\mathbf{B} - 8\mathbf{C}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-5) & 2 \cdot (-7) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 & 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 4 & 5 \cdot (-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \cdot 3 & 8 \cdot (-15) \\ 8 \cdot 12 & 8 \cdot (-6) \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -10 & -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & -120 \\ 96 & -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 15 - 24 & -2 - 0 + 120 \\ 10 - 20 - 96 & 14 + 5 + 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 & 118 \\ -106 & 67 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} -43 & 118 \\ -106 & 67 \end{pmatrix}$

$$(7) 4\mathbf{E} - 2\mathbf{F}$$

$$= 4 \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 2 & -9 & 6 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 7 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 0 & 4 \cdot (-8) \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot (-2) & 4 \cdot (-4) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot (-5) & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-9) & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot (-6) & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 28 & 8 & -8 \\ 4 & 0 & -32 \\ 12 & -8 & -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & -4 & 12 \\ 4 & -18 & 12 \\ -4 & -12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 - (-10) & 8 - (-4) & -8 - 12 \\ 4 - 4 & 0 - (-18) & -32 - 12 \\ 12 - (-4) & -8 - (-12) & -16 - (-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 12 & -20 \\ 0 & 18 & -44 \\ 16 & 4 & -14 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 38 & 12 & -20 \\ 0 & 18 & -44 \\ 16 & 4 & -14 \end{pmatrix}$

$$(8) -3\mathbf{D} + 4\mathbf{E} - 2\mathbf{F}$$

$$(7) \text{より, } 4\mathbf{E} - 2\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 38 & 12 & -20 \\ 0 & 18 & -44 \\ 16 & 4 & -14 \end{pmatrix} \text{を用いて,}$$

$$= -3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 38 & 12 & -20 \\ 0 & 18 & -44 \\ 16 & 4 & -14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \cdot 3 & -3 \cdot 0 & -3 \cdot 0 \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 3 & -3 \cdot 0 \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 0 & -3 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 38 & 12 & -20 \\ 0 & 18 & -44 \\ 16 & 4 & -14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 38 & 12 & -20 \\ 0 & 18 & -44 \\ 16 & 4 & -14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 + 38 & 0 + 12 & 0 + (-20) \\ 0 + 0 & -9 + 18 & 0 + (-44) \\ 0 + 16 & 0 + 4 & -9 + (-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 12 & -20 \\ 0 & 9 & -44 \\ 16 & 4 & -23 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 29 & 12 & -20 \\ 0 & 9 & -44 \\ 16 & 4 & -23 \end{pmatrix}$

$$(9) 3(\mathbf{E} - \mathbf{F}) + 5\mathbf{D} + 4\mathbf{F} - 4\mathbf{D} - 2\mathbf{E}$$

$$= 3\mathbf{E} - 3\mathbf{F} + 5\mathbf{D} + 4\mathbf{F} - 4\mathbf{D} - 2\mathbf{E} = \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 2 & -9 & 6 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+7+(-5) & 0+2+(-2) & 0+(-2)+6 \\ 0+1+2 & 3+0+(-9) & 0+(-8)+6 \\ 0+3+(-2) & 0+(-2)+(-6) & 3+(-4)+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & -2 \\ 1 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{答} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & -2 \\ 1 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(10) 2\mathbf{F} - 5\mathbf{E} + 3\mathbf{D} + 2(\mathbf{E} - \mathbf{F}) - 4\mathbf{D} + \mathbf{E} + 3\mathbf{D}$$

$$= 2\mathbf{F} - 5\mathbf{E} + 3\mathbf{D} + 2\mathbf{E} - 2\mathbf{F} - 4\mathbf{D} + \mathbf{E} + 3\mathbf{D} = -2\mathbf{E} + 2\mathbf{D}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 7 & -2 \cdot 2 & -2 \cdot (-2) \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 0 & -2 \cdot (-8) \\ -2 \cdot 3 & -2 \cdot (-2) & -2 \cdot (-4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 16 \\ -6 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14+6 & -4+0 & 4+0 \\ -2+0 & 0+6 & 16+0 \\ -6+0 & 4+0 & 8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 4 \\ -2 & 6 & 16 \\ -6 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\text{答} \quad \begin{pmatrix} -8 & -4 & 4 \\ -2 & 6 & 16 \\ -6 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(11) 5(\mathbf{F} - \mathbf{E}) + 2\mathbf{D} + 3(\mathbf{E} - \mathbf{F} - \mathbf{D}) + \mathbf{D} - 2\mathbf{E}$$

$$= 5\mathbf{F} - 5\mathbf{E} + 2\mathbf{D} + 3\mathbf{E} - 3\mathbf{F} - 3\mathbf{D} + \mathbf{D} - 2\mathbf{E} = 2\mathbf{F} - 4\mathbf{E}$$

$$2\mathbf{F} - 4\mathbf{E} = -(4\mathbf{E} - 2\mathbf{F})$$

(7) より,

$$= - \begin{pmatrix} 38 & 12 & -20 \\ 0 & 18 & -44 \\ 16 & 4 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -38 & -12 & 20 \\ 0 & -18 & 44 \\ -16 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\text{答} \quad \begin{pmatrix} -38 & -12 & 20 \\ 0 & -18 & 44 \\ -16 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

問9: 次の計算をせよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= 8 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 38$$

$$\text{答} \quad 38$$

$$(2) \begin{pmatrix} -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= -7 \cdot 1 + 5 \cdot (-4) = -7 - 20 = -27$$

$$\text{答} \quad -27$$

$$(3) (0 \ 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$$

答 0

$$(4) (-2 \ -2 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -2 + 2 + 2 = 2$$

答 2

$$(5) (2 \ -3) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 = 8 - 3 = 5$$

答 5

$$(6) (4 \ 3 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 4 + 6 + 6 + 4 = 20$$

答 20

$$(7) \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}^T (1 \ -3 \ 8 \ 6)^T$$

$$= 3 \cdot 1 + 14 \cdot (-3) + 3 \cdot 8 + 6 \cdot 6 = 3 - 42 + 24 + 36 = 21$$

答 21

問10: 次の計算をせよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 6 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 6 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6 & 4 + 4 \\ 4 + 12 & 8 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 2 & 9 + 4 \\ 4 + 2 & 3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(4) \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + \sqrt{5} \cdot 0 & -1 \cdot 0 + \sqrt{5} \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$(5) \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 & 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}$

$$(6) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 & -2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 & 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

$$(7) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 & 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ -13 & -26 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} -2 & 19 \\ -13 & -26 \end{pmatrix}$

$$(8) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 & (-3) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 (9) & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 9 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 9 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 9 \cdot 3 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 (10) & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ -1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) & -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 (11) & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 2 \cdot 2 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 (12) & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 (13) & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 18 \\ 18 & 16 & 14 \\ 14 & 16 & 10 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} 14 & 20 & 18 \\ 18 & 16 & 14 \\ 14 & 16 & 10 \end{pmatrix}$

問11: 次の計算をせよ.

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & = (3 \cdot 3 \quad 5 \cdot 1) = (9 \quad 5)
 \end{aligned}$$

答 $(9 \quad 5)$

$$\begin{aligned}
 (2) & \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} (3 \quad 1) \\
 & = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 (3) & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (0 \quad -1 \quad 0) \\
 & = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 (4) & (1 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\
 & = (1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) \quad 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = (0 - 6 \quad 1 + 0) = (-6 \quad 1)
 \end{aligned}$$

答 $(-6 \quad 1)$

$$(5) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 10 & -2 \\ -8 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \\ (-8) \cdot 2 + (-5) \cdot 4 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 20 + 6 \\ 4 + 40 - 6 \\ -16 - 20 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 38 \\ -30 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 32 \\ 38 \\ -30 \end{pmatrix}$

$$(6) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 + 1 \\ 0 - 4 - 1 \\ 0 + 0 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$(7) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$

$$(8) \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) + (-4) \cdot 0 \\ 1 \cdot (-3) + 4 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 \\ 0 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 8 + 0 \\ -3 - 16 + 0 \\ 0 - 8 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -19 \\ -8 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 11 \\ -19 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$(9) \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) \\ 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

問12: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, 次の計算をしなさい.

(1) \mathbf{AB}

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \\ 8 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) & 8 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 16 & -6 + 12 \\ 16 - 8 & -16 + 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$

(2) \mathbf{BA}

$$\begin{aligned}\mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 8 & 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 \\ (-4) \cdot 3 + 3 \cdot 8 & (-4) \cdot 4 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 16 & 8 - 4 \\ -12 + 24 & -16 + 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 12 & -10 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 12 & -10 \end{pmatrix}$

(3) \mathbf{BC}

$$\begin{aligned}\mathbf{BC} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \\ (-4) \cdot 3 + 3 \cdot 0 & (-4) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 0 & 0 + 2 \\ -12 + 0 & 0 - 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}$

(4) \mathbf{CD}

$$\mathbf{CD} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(5) \mathbf{DC}

$$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $A(BC)$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \\ (-4) \cdot 3 + 3 \cdot 0 & (-4) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0 & 0+2 \\ (-12+0) & 0-3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 + 4 \cdot (-12) & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 8 \cdot 6 + 2 \cdot (-12) & 8 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-48 & 6-12 \\ 48-24 & 16-6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -30 & -6 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$$

答 $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -30 & -6 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}}}$

(7) $(AB)C$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \\ 8 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) & 8 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-16 & (-6)+12 \\ 16-8 & (-16)+6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-10) \cdot 3 + 6 \cdot 0 & (-10) \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \\ 8 \cdot 3 + (-10) \cdot 0 & 8 \cdot 0 + (-10) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-30)+0 & 0-6 \\ 24+0 & 0+10 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -30 & -6 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$$

答 $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -30 & -6 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}}}$

(8) $A(B+C)$

$$B+C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & (-2)+0 \\ (-4)+0 & 3+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-4) & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 \\ 8 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) & 8 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-16 & (-6)+8 \\ 40-8 & (-16)+4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 32 & -12 \end{pmatrix}$$

答 $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 32 & -12 \end{pmatrix}}}$

(9) B^2

$$BB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) & 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \\ (-4) \cdot 2 + 3 \cdot (-4) & (-4) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4+8 & (-4)-6 \\ (-8)-12 & 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$$

答 $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}}}$

(10) \mathbf{B}^3

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^2\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -20 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdot 2 + (-10) \cdot (-4) & 12 \cdot (-2) + (-10) \cdot 3 \\ (-20) \cdot 2 + 17 \cdot (-4) & (-20) \cdot (-2) + 17 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 + 40 & (-24) - 30 \\ (-40) - 68 & 40 + 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & -54 \\ -108 & 91 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} 64 & -54 \\ -108 & 91 \end{pmatrix}$

(11) \mathbf{ADB}

$$\mathbf{AD} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 8 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{ADB} = \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \\ 8 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) & 8 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 16 & (-6) + 12 \\ 16 - 8 & (-16) + 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$

(12) $\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}$

$$\begin{aligned}(9) \text{より, } \mathbf{B}^2 &= \begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -20 & 17 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -20 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 2 & (-10) - (-2) \\ (-20) - (-4) & 17 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -16 & 14 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -16 & 14 \end{pmatrix}$

(13) \mathbf{ABCD}

$$(1) \text{より, } \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$(4) \text{より, } \mathbf{CD} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{ABCD} = \mathbf{ABC} &= \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-10) \cdot 3 + 6 \cdot 0 & (-10) \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \\ 8 \cdot 3 + (-10) \cdot 0 & 8 \cdot 0 + (-10) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-30) + 0 & 0 - 6 \\ 24 + 0 & 0 + 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -30 & -6 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

答 $\begin{pmatrix} -30 & -6 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$

問13: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+0+2+5 & 2+0+0+10 & 0+0+6+20 & 2+0+4+5 \\ 1+0+1+1 & 1+0+0+2 & 0+0+3+4 & 1+0+2+1 \\ 4+15+3+1 & 4+10+0+2 & 0+5+9+4 & 4+10+6+1 \\ 1+12+0+1 & 1+8+0+2 & 0+4+0+4 & 1+8+0+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 12 & 26 & 11 \\ 3 & 3 & 7 & 4 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \\ 14 & 11 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 26 & 11 \\ 3 & 3 & 7 & 4 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \\ 14 & 11 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

問14: 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は等式 $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ を満たす.

$$\text{これは } A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = (bc-ad)E \text{ によって証明できる. これをケーリー・ハミルトンの定理と呼ぶ.}$$

この定理を用いて, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき以下の計算をせよ.

(1) A^3

$$A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E, (a+d) = 5, (ad-bc) = (4-4) = 0 \text{ より, } A^2 = 5A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (5A)A = 5A^2 = 5(5A) = 25A$$

$$= 25 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 25 & 2 \cdot 25 \\ 2 \cdot 25 & 4 \cdot 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{pmatrix}$

(2) A^5

$$(1) \text{より } A^4 = A^2 \cdot A^2 = (5A) \cdot (5A) = 25A^2 = 25(5A) = 125A$$

$$A^5 = A^4 \cdot A \text{ なので,}$$

$$A^5 = (125A)A = 125A^2 = 125(5A) = 625A$$

$$= 625 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 625 & 2 \cdot 625 \\ 2 \cdot 625 & 4 \cdot 625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 625 & 1250 \\ 1250 & 2500 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 625 & 1250 \\ 1250 & 2500 \end{pmatrix}$