線形代数学　理解度確認　演習問題

07：　簡約な行列，階級			講義日：　　　月　　　日
学科名	学年	学籍番号	氏　名
□ 機械システム工学科 □ その他（　　　　　　科）	年		

問1：次の行列を簡約化し，階数を求めよ．

(1)　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{①}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \underset{②}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{③}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① 第 1 行の−3 倍を第 2 行に加える．

② 第 2 行を $-\frac{1}{10}$ 倍する．

③ 第 2 行の−4 倍を第 1 行に加える．

したがって，　階数は2

答　　階数は 2

(2)　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -12 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -12 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{①}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{②}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 4 \end{pmatrix} \underset{③}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -12 & 4 \end{pmatrix} \underset{④}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{⑤}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} \underset{⑥}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{⑦}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{⑧}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① 第 1 行の−2 倍を第 2 行に加える．

② 第 1 行の−3 倍を第 3 行に加える．

③ 第 2 行を $-\frac{1}{6}$ 倍する．

④ 第 2 行の−4 倍を第 1 行に加える．

⑤ 第 2 行の 12 倍を第 3 行に加える．

⑥ 第 3 行を $\frac{1}{28}$ 倍する．

⑦ 第 3 行の 8 倍を第 1 行に加える．

⑧ 第 3 行の−2 倍を第 2 行に加える．

したがって，　階数は3

答　　階数は 3

(3)　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix} \underset{①}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix} \underset{②}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① 第 1 行の−2 倍を第 2 行に加える．

② 第 1 行の−4 倍を第 3 行に加える．

したがって，階数は 1

答　　階数は 1

(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & -6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3 & 7 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & -6\end{pmatrix}\underset{①}{\to}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -6\\ 3 & 7 & 1 & 2\end{pmatrix}\underset{②}{\to}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -6\\ 0 & 1 & -8 & 20\end{pmatrix}\underset{③}{\to}\begin{pmatrix}1 & 0 & 21 & -46\\ 0 & 1 & -8 & 20\end{pmatrix}$$

① 第 1 行と第 2 行を入れ替える.

② 第 1 行の−3 倍を第 2 行に加える.

③ 第 2 行の−2 倍を第 1 行に加える.

したがって, 階数は2

答 階数は 2

問2 : $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$のとき, 次の行列を簡約化し, 階数を求めよ.

(1) $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}\underset{①}{\to}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -10\end{pmatrix}\underset{②}{\to}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\underset{③}{\to}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

① 第 1 行の−3 倍を第 2 行に加える.

② 第 2 行を $-\frac{1}{10}$ 倍する.

③ 第 2 行の−4 倍を第 1 行に加える.

したがって, 階数は2

答 階数は 2

(2) $\boldsymbol{A}^T$ $\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\underset{①}{\to}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -10\end{pmatrix}\underset{②}{\to}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\underset{③}{\to}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

① 第 1 行の−4 倍を第 2 行に加える.

② 第 2 行を $-\frac{1}{10}$ 倍する.

③ 第 2 行の−3 倍を第 1 行に加える.

したがって, 階数は2

答 階数は 2

問3：次の連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約化し，階数を求めよ.

$$\begin{cases} 3x+6y-9z=0 \\ -6x+y+4z=-1 \\ 3x+2y+3z=8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 0 \\ -6 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \underset{①}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -6 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \underset{②}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 13 & -14 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \underset{③}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 13 & -14 & -1 \\ 0 & -4 & 12 & 8 \end{array}\right)$$

$$\underset{④}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 13 & -14 & -1 \end{array}\right) \underset{⑤}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 13 & -14 & -1 \end{array}\right) \underset{⑥}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 25 & 25 \end{array}\right) \underset{⑦}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{⑧}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{⑨}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

① 第 1 行を $\frac{1}{3}$ 倍する.

② 第 1 行の 6 倍を第 2 行に加える.

③ 第 1 行の−3 倍を第 3 行に加える.

④ 第 3 行を $-\frac{1}{4}$ 倍して，第 2 行と第 3 行を入れ替える.

⑤ 第 2 行の-2 倍を第 1 行に加える.

⑥ 第 2 行の−13 倍を第 3 行に加える.

⑦ 第 3 行を $\frac{1}{25}$ 倍する.

⑧ 第 3 行の−3 倍を第 1 行に加える.

⑨ 第 3 行の 3 倍を第 2 行に加える.

したがって， 階数は3

答 階数は 3

問4：次の連立 1 次方程式が解をもつための a，b の条件を掃き出し法で求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 12 & 10 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 10 & a \\ 1 & 6 & 5 & b \end{array}\right) \underset{①}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & a-4 \\ 1 & 6 & 5 & b \end{array}\right) \underset{②}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & a-4 \\ 0 & 3 & 3 & b-2 \end{array}\right)$$

$$\underset{③}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -b+4 \\ 0 & 6 & 6 & a-4 \\ 0 & 3 & 3 & b-2 \end{array}\right) \underset{④}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -b+4 \\ 0 & 0 & 0 & a-2b \\ 0 & 3 & 3 & b-2 \end{array}\right)$$

① 第 1 行の−2 倍を第 2 行に加える.

② 第 1 行の−1 倍を第 3 行に加える.

③ 第 3 行の-1 倍を第 1 行に加える.

④ 第 3 行の-2 倍を第 2 行に加える.

この行列の第 2 行に対応する方程式は， $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=a-2b$

これを満たす a，b の条件は $a-2b=0$

なお，この条件は第 1 行および第 3 行においても成立する.

答 $a-2b=0$

問5：次の連立１次方程式が解をもつための a の条件を求めよ．さらに，そのときの解を求めよ．（ヒント：教科書 p.55 の「定理」を使う．）

$$\begin{cases} x+2y+(a-2)z=3 \\ -3x-11y-(3a-1)z=5a+6 \\ 2x+7y+(2a-1)z=2a-3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a-2 & 3 \\ -3 & -11 & -3a+1 & 5a+6 \\ 2 & 7 & 2a-1 & 2a-3 \end{array}\right) \underset{①}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a-2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 5a+15 \\ 2 & 7 & 2a-1 & 2a-3 \end{array}\right) \underset{②}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a-2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 5a+15 \\ 0 & 3 & 3 & 2a-9 \end{array}\right)$$

$$\underset{③}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a-2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -a-3 \\ 0 & 3 & 3 & 2a-9 \end{array}\right) \underset{④}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-4 & 2a+9 \\ 0 & 1 & 1 & -a-3 \\ 0 & 3 & 3 & 2a-9 \end{array}\right) \underset{⑤}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-4 & 2a+9 \\ 0 & 1 & 1 & -a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 5a \end{array}\right) \cdots *$$

① 第１行の３倍を第２行に加える．

② 第１行の−2 倍を第３行に加える．

③ 第２行を $-\frac{1}{5}$ 倍する．

④ 第２行の−2 倍を第１行に加える．

⑤ 第２行の−3 倍を第３行に加える．

この行列の第３行に対応する方程式は，$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=5a$

これを満たす a の条件は $a=0$

$a=0$ を $*$ に代入すると，$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

なお，この条件は第１行および第２行においても成立する．

この行列に対応する連立１次方程式は

$$\begin{cases} x-4z=9 \\ y+z=-3 \end{cases}$$

よって，z に任意の値を与えると，x, y の値が決まる．

これより，C を任意定数とすると，$x=9+4C$，$y=-3-C$，$z=C$

答　a の条件は $a=0$ である．また，C を任意定数とすると，$x=9+4C$，$y=-3-C$，$z=C$