線形代数学　理解度確認　演習問題

06：　基本変形			講義日：　　　月　　　日
学科名	学年	学籍番号	氏　名
□　機械システム工学科 □　その他（　　　　　　科）	年		

行列の行基本変形ルール
ルール 1：ある行を何倍かする ルール 2：2 つの行を入れ替える ルール 3：ある行の何倍かを他の行に加える

問1：次の連立 1 次方程式の解を掃き出し法で求めよ．

(1) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 5 & | & 7 \end{pmatrix} \underset{①}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \underset{②}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \underset{③}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

①　第 1 列が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ になるように第 1 行の−2 倍を第 2 行に加える．（ルール 3）

②　第 2 列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ になるように第 2 行の$-\frac{1}{3}$倍を第 1 行に加える．（ルール 3）

③　第 2 行を$\frac{1}{3}$倍する．（ルール 1）

$x=1$，$y=1$

答　　$x=1$，$y=1$

(2) $\begin{cases} 3x+7y+7z=1 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 7 & | & 1 \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{①}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 7 & 7 & | & 1 \end{pmatrix} \underset{②}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \underset{③}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

①　第 1 列が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるように第 1 行と第 2 行を入れ替える．（ルール 2）

②　第 1 行の−3 倍を第 2 行に加える．（ルール 3）

③　第 2 列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ になるように第 2 行の−2 倍を第 1 行に加える．（ルール 3）

この行列の第 1 行と第 2 行に対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x=-2 \\ y+z=1 \end{cases}$$

よって，z に任意の値を与えると，x，y の値が決まる．

これより，$z=c$ を任意定数とすると，$x=-2$，$y=1-c$，$z=c$

答　　$z=c$ を任意定数とすると，$x=-2$，$y=1-c$，$z=c$

問2：次の連立 1 次方程式の解を掃き出し法で求めよ.

(1) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{①}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 1 & -9 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{②}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right) \underset{③}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right) \underset{④}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right) \underset{⑤}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \end{array}\right) \underset{⑥}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{⑦}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{⑧}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

① 第 1 列が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ になるように第 1 行の−3 倍を第 2 行に加える.（ルール 3）

② 第 1 行の−2 倍を第 3 行に加える.（ルール 3）

③ 第 2 列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ になるように第 2 行を$-\frac{1}{7}$ 倍する.（ルール 1）

④ 第 2 行の−2 倍を第 1 行に加える.（ルール 3）

⑤ 第 2 行の 3 倍を第 3 行に加える.（ルール 3）

⑥ 第 3 列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ になるように第 3 行を $\frac{7}{4}$ 倍する.（ルール 1）

⑦ 第 3 行の$-\frac{2}{7}$ 倍を第 1 行に加える.（ルール 3）

⑧ 第 3 行の$\frac{1}{7}$倍を第 2 行に加える.（ルール 3）

したがって，

$x=1,\ y=1,\ z=-2$

答 $x=1,\ y=1,\ z=-2$

(2) $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ x-y+5z=10 \\ 2x+2y-6z=5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \underset{①}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & 8 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \underset{②}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

① 第 1 列が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ になるように第 1 行の−1 倍を第 2 行に加える.（ルール 3）

② 第 1 行の−2 倍を第 3 行に加える.（ルール 3）

この行列の第 3 行に対応する方程式は，

$$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=1$$

これを満たすx,y,zは存在しない.

よって，この連立 1 次方程式の解は存在しない.

答 解なし

問3：3 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}$ がある. x, y, z に関する連立 1 次方程式

$$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$$

の解を $(x, y, z) = (s, t, u)$ とする. このとき, x', y', z' に関する次の連立 1 次方程式の解を s, t, u を用いて表わせ.

$$(2\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3 - 3\boldsymbol{a}_2)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

$(x, y, z) = (s, t, u)$ を満たすので $s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 + u\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$ であり, 式をまとめると,

$$(2\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3 - 3\boldsymbol{a}_2)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_2 + u\boldsymbol{a}_3$$

列ベクトル($\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$)ごとにまとめると,

$$\begin{cases} 2x' + y' = s \\ -y' - 3z' = t \\ z' = u \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & s \\ 0 & -1 & -3 & t \\ 0 & 0 & 1 & u \end{array}\right) \xrightarrow{①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{s}{2} \\ 0 & -1 & -3 & t \\ 0 & 0 & 1 & u \end{array}\right) \xrightarrow{②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{s}{2}+\frac{t}{2} \\ 0 & -1 & -3 & t \\ 0 & 0 & 1 & u \end{array}\right) \xrightarrow{③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{s}{2}+\frac{t}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -t \\ 0 & 0 & 1 & u \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{④} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{s}{2}+\frac{t}{2}+\frac{3u}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -t \\ 0 & 0 & 1 & u \end{array}\right) \xrightarrow{⑤} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{s}{2}+\frac{t}{2}+\frac{3u}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -t-3u \\ 0 & 0 & 1 & u \end{array}\right)$$

① 第 1 列が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ になるように第 1 行を $\frac{1}{2}$ 倍する.（ルール 1）

② 第 2 列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ になるように第 2 行の $\frac{1}{2}$ 倍を第 1 行に加える.（ルール 3）

③ 第 2 行を−1 倍する.（ルール 1）

④ 第 3 列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ になるように第 3 行の $\frac{3}{2}$ 倍を第 1 行に加える.（ルール 3）

⑤ 第 3 行の−3 倍を第 2 行に加える.（ルール 3）

したがって, $x' = \frac{s}{2} + \frac{t}{2} + \frac{3u}{2}$, $y' = -t - 3u$, $z' = u$

答　$x' = \frac{s}{2} + \frac{t}{2} + \frac{3u}{2}$, $y' = -t - 3u$, $z' = u$