線形代数学　理解度確認　演習問題

05：　行列の積		講義日：　　　月　　　日	
学科名	学年	学籍番号	氏　名
□ 機械システム工学科 □ その他（　　　　　科）	年		

問1：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-2\\1&0&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&3&6\end{pmatrix}$ のとき，次の計算をせよ．

（1）$\mathbf{AB}$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-2\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&3&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot0&1\cdot2+2\cdot4+0\cdot3&1\cdot3+2\cdot5+0\cdot6\\0\cdot1+2\cdot0+(-2)\cdot0&0\cdot2+2\cdot4+(-2)\cdot3&0\cdot3+2\cdot5+(-2)\cdot6\\1\cdot1+0\cdot0+2\cdot0&1\cdot2+0\cdot4+2\cdot3&1\cdot3+0\cdot5+2\cdot6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+0&2+8+0&3+10+0\\0+0+0&0+8-6&0+10-12\\1+0+0&2+0+6&3+0+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&10&13\\0&2&-2\\1&8&15\end{pmatrix}$$

答　$\begin{pmatrix}1&10&13\\0&2&-2\\1&8&15\end{pmatrix}$

（2）$\mathbf{BA}$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-2\\1&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot1&1\cdot2+2\cdot2+3\cdot0&1\cdot0+2\cdot(-2)+3\cdot2\\0\cdot1+4\cdot0+5\cdot1&0\cdot2+4\cdot2+5\cdot0&0\cdot0+4\cdot(-2)+5\cdot2\\0\cdot1+3\cdot0+6\cdot1&0\cdot2+3\cdot2+6\cdot0&0\cdot0+3\cdot(-2)+6\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+3&2+4+0&0-4+6\\0+0+5&0+8+0&0-8+10\\0+0+6&0+6+0&0-6+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&2\\5&8&2\\6&6&6\end{pmatrix}$$

答　$\begin{pmatrix}4&6&2\\5&8&2\\6&6&6\end{pmatrix}$

（3）$(\mathbf{AB})^2$

（1）より，$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&10&13\\0&2&-2\\1&8&15\end{pmatrix}$ を用いると，

$$(\mathbf{AB})^2=\begin{pmatrix}1&10&13\\0&2&-2\\1&8&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&10&13\\0&2&-2\\1&8&15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+10\cdot0+13\cdot1&1\cdot10+10\cdot2+13\cdot8&1\cdot13+10\cdot(-2)+13\cdot15\\0\cdot1+2\cdot0+(-2)\cdot1&0\cdot10+2\cdot2+(-2)\cdot8&0\cdot13+2\cdot(-2)+(-2)\cdot15\\1\cdot1+8\cdot0+15\cdot1&1\cdot10+8\cdot2+15\cdot8&1\cdot13+8\cdot(-2)+15\cdot15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+13&10+20+104&13-20+195\\0+0-2&0+4-16&0-4-30\\1+0+15&10+16+120&13-16+225\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&134&188\\-2&-12&-34\\16&146&222\end{pmatrix}$$

答　$\begin{pmatrix}14&134&188\\-2&-12&-34\\16&146&222\end{pmatrix}$

(4) $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$

$$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-2\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-2\\1&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot1&1\cdot2+2\cdot2+0\cdot0&1\cdot0+2\cdot(-2)+0\cdot2\\0\cdot1+3\cdot0+(-2)\cdot1&0\cdot2+2\cdot2+(-2)\cdot0&0\cdot0+2\cdot(-2)+(-2)\cdot2\\1\cdot1+0\cdot0+2\cdot1&1\cdot2+0\cdot2+2\cdot0&1\cdot0+0\cdot(-2)+2\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+0&2+4+0&0-4+0\\0+0-2&0+4+0&0-4-4\\1+0+2&2+0+0&0+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6&-4\\-2&4&-8\\3&2&4\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&3&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0&1\cdot2+2\cdot4+3\cdot3&1\cdot3+2\cdot5+3\cdot6\\0\cdot1+4\cdot0+5\cdot0&0\cdot2+4\cdot4+5\cdot3&0\cdot3+4\cdot5+5\cdot6\\0\cdot1+3\cdot0+6\cdot0&0\cdot2+3\cdot4+6\cdot3&0\cdot3+3\cdot5+6\cdot6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+0&2+8+9&3+10+18\\0+0+0&0+16+15&0+20+30\\0+0+0&0+12+18&0+15+36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&19&31\\0&31&50\\0&30&51\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=\begin{pmatrix}1&6&-4\\-2&4&-8\\3&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&19&31\\0&31&50\\0&30&51\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+6\cdot0+(-4)\cdot0&1\cdot19+6\cdot31+(-4)\cdot30&1\cdot31+6\cdot50+(-4)\cdot51\\(-2)\cdot1+4\cdot0+(-8)\cdot0&(-2)\cdot19+4\cdot31+(-8)\cdot30&(-2)\cdot31+4\cdot50+(-8)\cdot51\\3\cdot1+2\cdot0+4\cdot0&3\cdot19+2\cdot31+4\cdot30&3\cdot31+2\cdot50+4\cdot51\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+0&19+186-120&31+300-204\\-2+0+0&-38+124-240&-62+200-408\\3+0+0&57+62+120&93+100+204\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&85&127\\-2&-154&-270\\3&239&397\end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix}1&85&127\\-2&-154&-270\\3&239&397\end{pmatrix}$

問2：$\mathbf{X}^2=\begin{pmatrix}81&0\\0&36\end{pmatrix}$ を満たす 2x2 行列 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ をすべて求めよ.

$$\mathbf{X}^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}81&0\\0&36\end{pmatrix}$$

成分ごとに等式をみたすことから, $\begin{cases}a^2+bc=81&\cdots①\\bc+d^2=36&\cdots②\\ab+bd=0&\cdots③\\ac+cd=0&\cdots④\end{cases}$

式①より, $bc=81-a^2$ $\cdots①'$

式①'を式②に代入すると, $81-a^2+d^2=36$ よって, $-a^2+d^2=-45$ $\cdots②'$

式③より, $b(a+d)=0$ $\cdots③'$

式④より, $c(a+d)=0$ $\cdots④'$

式③'と式④'を同時に満たす場合として,

$a+d\neq0$ $\cdots⑤$ の場合と,

$a+d=0$ $\cdots⑥$ の場合が考えられる.

i.　$a+d \neq 0$ の場合

式③$'$から，$b=0 \quad \cdots⑦$，かつ式④$'$から，$c=0 \quad \cdots⑧$ である.

式⑦⑧を式①に代入すると，$a^2=81$　よって，　$a=\pm 9$（順不同）

式⑦⑧を式②に代入すると，$d^2=36$　よって，　$d=\pm 6$（順不同）

したがって，$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ の 4 つである.

ii.　$a+d=0$ の場合

式⑥より，$a=-d \quad \cdots⑥'$

式⑥' を式②' の左辺に代入すると，$-d^2+d^2 \neq -45$ となり，式②' を満たさないので，解はない.

i と ii より，$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ の 4 つである.

答　$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

問3：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ は次の等式をみたすことを証明しなさい.

$\mathbf{A}^2-(a+d)\mathbf{A}+(ad-bc)\mathbf{E}=\mathbf{0}$ （※なお，この証明が成り立つことをケーリー・ハミルトンの定理という.）

$$左辺=\mathbf{A}^2-(a+d)\mathbf{A}+(\mathrm{ad}-\mathrm{bc})\mathbf{E}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ac+bd \\ ab+bd & ad+d^2 \end{pmatrix}+(ad-bc)\mathbf{E}$$

$$=\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}+(ad-bc)\mathbf{E}=\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}=0$$

$=$ 右辺

よって，$\mathbf{A}^2-(a+d)\mathbf{A}+(ad-bc)\mathbf{E}=0$