

線形代数学 理解度確認 演習問題

04: 行列の和・差・実数倍			講義日: 月 日
学科名	学年	学籍番号	氏名
<input type="checkbox"/> 機械システム工学科			
<input type="checkbox"/> その他(科)	年		

問1: 次の行列を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+5 & 5+2 & 2-1 \\ 4+3 & -2+6 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$(2) 2 \begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -10 & 6 \\ -4 & 8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 & 12 \\ -15 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-6 & -10+3 & 6+12 \\ -4-15 & 8-3 & 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -7 & 18 \\ -19 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} -8 & -7 & 18 \\ -19 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

問2: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ のとき, 次の等式を満たす行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ.

$$(1) 2A = 3B - X$$

$$X = 3B - 2A$$

$$\text{したがって, } X = 3 \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 30 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 32 \\ -1 & -15 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 15 & 32 \\ -1 & -15 \end{pmatrix}$

$$(2) X - 4B = -3X + 2(A + X)$$

$$X - 4B = -X + 2A$$

$$X = A + 2B$$

$$\text{したがって, } X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

答 $\begin{pmatrix} 17 & 19 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$

問3: 次の等式を満たす x, y の値を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} x+5 & x \\ 3x-1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & y \\ 0 & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y & 3y+1 \\ x+13 & x-5 \end{pmatrix}$$

$$\text{成分ごとに等式を満たすことから, } \begin{cases} x+5+y=5y & \dots \text{①} \\ x+y=3y+1 & \dots \text{②} \\ 3x-1=x+13 & \dots \text{③} \\ 5-y=x-5 & \dots \text{④} \end{cases}$$

$$\text{整理すると, } \begin{cases} x - 4y = -5 & \dots \textcircled{1}' \\ x - 2y = 1 & \dots \textcircled{2}' \\ x = 7 & \dots \textcircled{3}' \\ x + y = 10 & \dots \textcircled{4}' \end{cases}$$

式③'より, $x = 7$

これを, 式④'に代入すると, $y = 3$. これは式①' ②'を満たすので, 確かに解である.

答 $x = 7, y = 3$

$$(2) \begin{pmatrix} 3x + 2 & x^2 + 5 \\ y^2 + 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3y - 1 \\ 10x & x - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{成分ごとに等式を満たすことから, } \begin{cases} 3x + 2 = 11 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + 5 = 3y - 1 & \dots \textcircled{2} \\ y^2 + 5 = 10x & \dots \textcircled{3} \\ 2 = x - 1 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\text{整理すると, } \begin{cases} x = 3 & \dots \textcircled{1}' \\ x^2 - 3y = -6 & \dots \textcircled{2}' \\ y^2 - 10x = -5 & \dots \textcircled{3}' \\ x = 3 & \dots \textcircled{4}' (= \textcircled{1}')$$

式①'より, $x = 3$, 式②'より $y = 5$ となる.

これらは式③'も満たすので, 確かに解である.

答 $x = 3, y = 5$

問4: $\mathbf{X} - 2\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -13 & -7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $3\mathbf{X} - \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ のとき, 行列 \mathbf{X} , \mathbf{Y} を求めよ.

$$\begin{cases} \mathbf{X} - 2\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -13 & -7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \dots \textcircled{1} \\ 3\mathbf{X} - \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} & \dots \textcircled{2} \end{cases} \text{ と考え, 連立方程式を解く.}$$

式②を $\mathbf{Y} = 3\mathbf{X} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \dots \textcircled{2}'$ とする. 式②' を式①に代入して

$$\mathbf{X} - 2\left(3\mathbf{X} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -13 & -7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ より } \mathbf{X} - 6\mathbf{X} + 2\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5\mathbf{X} = 2\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13 & -7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{これにより } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{また, } \mathbf{X} \text{ を式①' に代入して } \mathbf{Y} = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

答 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$