# 線形代数学　理解度確認　演習問題

| 03（その2）：平面および空間のベクトル | | | 講義日：　　　月　　　日 |
|---|---|---|---|
| 学科名 | 学年 | 学籍番号 | 氏　名 |
| □ 機械システム工学科<br>□ その他（　　　　　科） | 年 | | |

問1：次の条件を満たす直線の方程式を求めよ.

(1)　平面上の点 $\mathrm{A}(3,1)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{n}=(4,5)^T$ と直交する直線

教科書 p20 の公式より $4\cdot(x-3)+5\cdot(y-1)=0$

$4x-12+5y-5=0$ よって $4x+5y-17=0$

答　$4x+5y-17=0$

(2)　空間内の点 $\mathrm{B}(-1,4,8)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{m}=(2,1,9)^T$ と平行な直線

教科書 p.20 の公式より $\frac{x-(-1)}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-8}{9}$ よって $\frac{x+1}{2}=y-4=\frac{z-8}{9}$

答　$\frac{x+1}{2}=y-4=\frac{z-8}{9}$

(3)　空間内の 2 点 $\mathrm{P}_1(2,-5,3)$，$\mathrm{P}_2(4,1,6)$ を通る直線

（解）求める直線のベクトルは $\overrightarrow{P_1P_2}=(4-2,1-(-5),6-3)^T=(2,6,3)^T$

点 $\mathrm{P}_1$ を通るので，教科書 p.20 の公式より $\frac{x-2}{2}=\frac{y-(-5)}{6}=\frac{z-3}{3}$ よって $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-3}{3}$

答　$\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-3}{3}$

（別解 1）求める直線のベクトルは $\overrightarrow{P_1P_2}=(4-2,1-(-5),6-3)^T=(2,6,3)^T$

点 $\mathrm{P}_2$ を通るので，教科書 p.20 の公式より $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-6}{3}$

なお，この式の全辺に 1 を足すと，（解）と同じ式になることが確認できる.

答　$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-6}{3}$

（別解 2）求める直線のベクトルを $\overrightarrow{P_2P_1}=(2-4,(-5)-1,3-6)^T=(-2,-6,-3)^T$

点 $\mathrm{P}_1$ を通るので，教科書 p.20 の公式より $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-(-5)}{-6}=\frac{z-3}{-3}$ よって $-\frac{x-2}{2}=-\frac{y+5}{6}=-\frac{z-3}{3}$

なお，この式の全辺に −1 をかけると(解)と同じ式になることが確認できる.

答　$-\frac{x-2}{2}=-\frac{y+5}{6}=-\frac{z-3}{3}$

（別解 3）求める直線のベクトルを $\overrightarrow{P_2P_1}=(2-4,(-5)-1,3-6)^T=(-2,-6,-3)^T$

点 $\mathrm{P}_2$ を通るので，教科書 p.20 の公式より $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z-6}{-3}$ よって $-\frac{x-4}{2}=-\frac{y-1}{6}=-\frac{z-6}{3}$

なお，この式の全辺に，−1 を足したのちに −1 をかけると(解）と同じ式になることが確認できる.

答　$-\frac{x-4}{2}=-\frac{y-1}{6}=-\frac{z-6}{3}$

問2：空間内の点 $\mathrm{C}(5,-8,-4)$ を通り，直線 $l:\frac{x-91}{2}=\frac{y+35}{3}=\frac{z+28}{7}$ と直交する平面 π の方程式を求めよ.

求める平面 π の方程式は，$ax+by+cz+d=0$ と書ける.

また，直線 $l$ の方向ベクトルは $\boldsymbol{l}=(2,\ 3,\ 7)^T$ である.

ここで，$\boldsymbol{l}$ は π と直交する（$\boldsymbol{l}$ は π の法線ベクトルである）ため，π は $2x+3y+7z+d=0$ と書ける.

π は点 C を通るため，点 C の値を π にそれぞれ代入すると，$2\cdot 5+3\cdot(-8)+7\cdot(-4)+d=0$
これを解いて，$d=42$ となる．したがって，π は $2x+3y+7z+42=0$
（別解）求める平面の方程式 π は $ax+by+cz+d=0$ である．
ここで，直線 $l$ の方向ベクトルは $\boldsymbol{l}=(2,\ 3,\ 7)^T$ であり，
π 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると，$\overrightarrow{CP}$ は $\boldsymbol{l}$ と直交するので
$(\boldsymbol{l},\overrightarrow{CP})=0$ $\quad\overrightarrow{CP}=\left(x-5,y-(-8),z-(-4)\right)^T=(x-5,y+8,z+4)^T$ であるので
$(\boldsymbol{l},\overrightarrow{CP})=2\cdot(x-5)+3\cdot(y+8)+7\cdot(z+4)=0$
$2x-10+3y+24+7z+28=0$ よって $2x+3y+7z+42=0$

答 π: $2x+3y+7z+42=0$

問3：空間内の点 $\mathrm{D}(5,11,14)$ から平面 $2x+2y+z=4$ への距離を求めよ．

教科書 p.21 の公式より $\frac{|2\cdot 5+2\cdot 11+1\cdot 14-4|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|42|}{\sqrt{9}}=\frac{42}{3}=14$

答 14

問4：次の条件を満たす平面の方程式を求めよ．

(1) 空間内の点 $\mathrm{E}(1,1,2)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{l_1}=(3,8,2)^T$，および $\boldsymbol{l_2}=(2,7,-1)^T$ と平行な平面

求める平面の方程式は $ax+by+cz+d=0$ と書ける．
ベクトル $\boldsymbol{l_1}$，$\boldsymbol{l_2}$ の両方に直交するベクトル，つまり平面の法線ベクトルを $\boldsymbol{l_3}=\left(l_x,\ l_y,\ l_z\right)^T$ とすると

$$\begin{cases}(\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_3})=3l_x+8l_y+2l_z=0\\(\boldsymbol{l_2},\boldsymbol{l_3})=2l_x+7l_y-l_z=0\end{cases}$$

この方程式を解くと，$\boldsymbol{l_3}=\left(l_x,-\frac{7}{22}l_x,-\frac{5}{22}l_x\right)^T$ ，$\boldsymbol{l_3}$ は方向ベクトルであり，

$l_x$ はどのような値でもよいので，$l_x=-22$ とおく．
求める平面上の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると $\overrightarrow{EP}$ はベクトル $\boldsymbol{l_3}$ と直交するので
$(\boldsymbol{l_3},\overrightarrow{EP})=0$ $\quad\overrightarrow{EP}=(x-1,y-1,z-2)^T$ なので
$(\boldsymbol{l_3},\overrightarrow{EP})=(-22)\cdot(x-1)+7\cdot(y-1)+5\cdot(z-2)=0$ したがって $-22x+22+7y-7+5z-10=0$
よって $-22x+7y+5z+5=0$

答 $-22x+7y+5z+5=0$

(2) 空間内の 3 点 $P_1(2,7,1)$，$P_2(3,5,4)$，$P_3(3,2,6)$ を通る平面と平行であり，かつ原点からの距離が $\sqrt{38}$ となるような平面

$\overrightarrow{P_1P_2}=(3-2,5-7,4-1)^T=(1,-2,3)^T$，$\overrightarrow{P_1P_3}=(3-2,2-7,6-1)^T=(1,-5,5)^T$
$\overrightarrow{P_1P_2}$ と $\overrightarrow{P_1P_3}$ に直交するベクトル $\boldsymbol{l}=(a,\ b,\ c)^T$ は

$$\begin{cases}(\boldsymbol{l},\overrightarrow{P_1P_2})=a-2b+3c=0\\(\boldsymbol{l},\overrightarrow{P_1P_3})=a-5b+5c=0\end{cases}$$

$l$ は方向ベクトルであり，どのような大きさでもよいので，$b=2$ とおくと，$a=-5$，$c=3$ となる．
ここで，求める方程式は $\boldsymbol{l}$ と直交する平面であるため，$-5x+2y+3z+d=0\ (d\in\boldsymbol{R})$ と表すことができる．

この平面と原点との距離が $\sqrt{38}$ であるため，点と平面の距離の公式より，$\frac{|(-5)\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0+d|}{\sqrt{(-5)^2+2^2+3^2}}=\sqrt{38}$

これを解くと，$\frac{|d|}{\sqrt{38}}=\sqrt{38}$ となるため，$d=\pm 38$ となる．

よって，求める方程式は $-5x+2y+3z\pm 38=0$

答 $\begin{cases}-5x+2y+3z+38=0\\-5x+2y+3z-38=0\end{cases}$ の 2 つ