線形代数学　理解度確認　演習問題

03：　平面および空間のベクトル		講義日：　　　月　　　日	
学科名	学年	学籍番号	氏　名
□　機械システム工学科 □　その他（　　　　　　科）	年		

問1：次の条件を満たす直線の方程式を求めよ.

(1)　平面上の点 $\mathrm{A}(2,5)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{n}=(2,1)^T$ と直交する直線

教科書 p20 の公式より $2\cdot(x-2)+1\cdot(y-5)=0$

$2x-4+y-5=0$　よって　$2x+y-9=0$

答　$2x+y-9=0$

(2)　空間内の点 $\mathrm{B}(1,-2,4)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{m}=(3,2,5)^T$ と平行な直線

教科書 p.20 の公式より $\frac{x-1}{3}=\frac{y-(-2)}{2}=\frac{z-4}{5}$　よって　$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{5}$

答　$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{5}$

(3)　空間内の 2 点 $\mathrm{P_1}(3,-6,1)$，$\mathrm{P_2}(1,4,3)$ を通る直線

（解）求める直線のベクトルは $\overrightarrow{P_1P_2}=(1-3,4-(-6),3-1)^T=(-2,10,2)^T$

点 $\mathrm{P_1}$ を通るので，教科書 p.20 の公式より $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-(-6)}{10}=\frac{z-1}{2}$　よって　$-\frac{x-3}{2}=\frac{y+6}{10}=\frac{z-1}{2}$

答　$-\frac{x-3}{2}=\frac{y+6}{10}=\frac{z-1}{2}$

（別解 1）求める直線のベクトルは $\overrightarrow{P_1P_2}=(1-3,4-(-6),3-1)^T=(-2,10,2)^T$

点 $\mathrm{P_2}$ を通るので，教科書 p.20 の公式より $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{10}=\frac{z-3}{2}$　よって　$-\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{10}=\frac{z-3}{2}$

なお，この式の全辺に 1 を足すと，（解）と同じ式になることが確認できる.

答　$-\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{10}=\frac{z-3}{2}$

（別解 2）求める直線のベクトルを $\overrightarrow{P_2P_1}=(3-1,(-6)-4,1-3)^T=(2,-10,-2)^T$

点 $\mathrm{P_1}$ を通るので，教科書 p.20 の公式より $\frac{x-3}{2}=\frac{y-(-6)}{-10}=\frac{z-1}{-2}$　よって　$\frac{x-3}{2}=-\frac{y+6}{10}=-\frac{z-1}{2}$

なお，この式の全辺に −1 をかけると(解)と同じ式になることが確認できる.

答　$\frac{x-3}{2}=-\frac{y+6}{10}=-\frac{z-1}{2}$

（別解 3）求める直線のベクトルを $\overrightarrow{P_2P_1}=(3-1,(-6)-4,1-3)^T=(2,-10,-2)^T$

点 $\mathrm{P_2}$ を通るので，教科書 p.20 の公式より $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-10}=\frac{z-3}{-2}$　よって　$\frac{x-1}{2}=-\frac{y-4}{10}=-\frac{z-3}{2}$

なお，この式の全辺に，−1 を足したのちに −1 をかけると(解）と同じ式になることが確認できる.

答　$\frac{x-1}{2}=-\frac{y-4}{10}=-\frac{z-3}{2}$

問2：空間内の点 $\mathrm{C}(2,-3,-1)$ を通り，直線 $l:\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{3}$ と直交する平面 π の方程式を求めよ.

求める平面 π の方程式は，$ax+by+cz+d=0$ と書ける.

また，直線 l の方向ベクトルは $\boldsymbol{l}=(2,\ 2,\ 3)^T$ である.

ここで，$\boldsymbol{l}$ は π と直交する（$\boldsymbol{l}$ は π の法線ベクトルである）ため，π は $2x+2y+3z+d=0$ と書ける.

π は点 C を通るため，点 C の値を π にそれぞれ代入すると，$2\cdot 2+2\cdot(-3)+3\cdot(-1)+d=0$

これを解いて，$d=5$ となる．したがって，π は $2x+2y+3z+5=0$

（別解）求める平面の方程式 π は $ax+by+cz+d=0$ である．

ここで，直線 l の方向ベクトルは $\boldsymbol{l}=(2,\ 2,\ 3)^T$ であり，

π 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると，$\overrightarrow{CP}$ は $\boldsymbol{l}$ と直交するので

$(\boldsymbol{l},\overrightarrow{CP})=0$ $\overrightarrow{CP}=\left(x-2,y-(-3),z-(-1)\right)^T=(x-2,y+3,z+1)^T$ であるので

$(\boldsymbol{l},\overrightarrow{CP})=2\cdot(x-2)+2\cdot(y+3)+3\cdot(z+1)=0$

$2x-4+2y+6+3z+3=0$ よって $2x+2y+3z+5=0$

答 $\pi: 2x+2y+3z+5=0$

問3：空間内の点 $\mathrm{D}(4,2,8)$ から平面 $x+2y-z=3$ への距離を求めよ．

教科書 p.21 の公式より $\frac{|1\cdot4+2\cdot2+(-1)\cdot8-3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

答 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

問4：次の条件を満たす平面の方程式を求めよ．

(1) 空間内の点 $\mathrm{E}(4,1,6)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{l_1}=(6,0,1)^T$，および $\boldsymbol{l_2}=(1,1,-2)^T$ と平行な平面

求める平面の方程式は $ax+by+cz+d=0$ と書ける．

ベクトル $\boldsymbol{l_1}$，$\boldsymbol{l_2}$ の両方に直交するベクトル，つまり平面の法線ベクトルを $\boldsymbol{l_3}=\left(l_x,\ l_y,\ l_z\right)^T$ とすると

$$\begin{cases}(\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_3})=6l_x+l_z=0\\(\boldsymbol{l_2},\boldsymbol{l_3})=l_x+l_y-2l_z=0\end{cases}$$

$l_z=-6l_x$，$l_y=-13l_x$ なので $\boldsymbol{l_3}=(l_x,-13l_x,-6l_x)^T$ ， $\boldsymbol{l_3}$ は方向ベクトルであり，

l_x はどのような値でもよいので， $l_x=1$ とおく．

求める平面上の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると $\overrightarrow{EP}$ はベクトル $\boldsymbol{l_3}$ と直交するので

$(\boldsymbol{l_3},\overrightarrow{EP})=0$ $\overrightarrow{EP}=(x-4,y-1,z-6)^T$ なので

$(\boldsymbol{l_3},\overrightarrow{EP})=1\cdot(x-4)+(-13)\cdot(y-1)+(-6)\cdot(z-6)=0$ したがって $x-4-13y+13-6z+36=0$

よって $x-13y-6z+45=0$

答 $x-13y-6z+45=0$

(2) 空間内の 3 点 $P_1(3,1,2)$，$P_2(3,2,-1)$，$P_3(1,2,3)$ を通る平面と平行であり，かつ原点からの距離が $\sqrt{21}$ となるような平面

$\overrightarrow{P_1P_2}=(3-3,2-1,(-1)-2)^T=(0,1,-3)^T$， $\overrightarrow{P_1P_3}=(1-3,2-1,3-2)^T=(-2,1,1)^T$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ と $\overrightarrow{P_1P_3}$ に直交するベクトル $\boldsymbol{l}=(a,\ b,\ c)^T$ は

$$\begin{cases}(\boldsymbol{l},\overrightarrow{P_1P_2})=b-3c=0\\(\boldsymbol{l},\overrightarrow{P_1P_3})=-2a+b+c=0\end{cases}$$

l は方向ベクトルであり，どのような大きさでもよいので， $c=1$ とおくと，$b=3$，$a=2$ となる．

ここで，求める方程式は $\boldsymbol{l}$ と直交する平面であるため，$2x+3y+z+d=0\ (d\in\boldsymbol{R})$ と表すことができる．

この平面と原点との距離が $\sqrt{21}$ であるため，点と平面の距離の公式より，$\frac{|2\cdot0+3\cdot0+1\cdot0+d|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\sqrt{21}$

これを解くと，$\frac{|d|}{\sqrt{14}}=\sqrt{21}$ となるため， $d=\pm7\sqrt{6}$ となる．

よって，求める方程式は $2x+3y+z\pm7\sqrt{6}=0$

答 $\begin{cases}2x+3y+z+7\sqrt{6}=0\\2x+3y+z-7\sqrt{6}=0\end{cases}$ の 2 つ