線形代数学　理解度確認　演習問題

02：　ベクトルと内積			講義日：　　　月　　　日
学科名	学年	学籍番号	氏　名
□ 機械システム工学科 □ その他（　　　　　科）	年		

問 1：次のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ は 1 次独立と 1 次従属のどちらであるかを判定せよ．

(1)　$\boldsymbol{a} = (4,\ 1)^T$，　$\boldsymbol{b} = (-12, -3)^T$

教科書 p.14 より

$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = (4\alpha, \alpha)^T + (-12\beta, -3\beta)^T$

$= (4\alpha - 12\beta, \alpha - 3\beta)^T$

$(4\alpha - 12\beta, \alpha - 3\beta)^T = (0,\ 0)^T$ と仮定し，この式を解くと，$\alpha = 3\beta$ となる．

これは，$\alpha = 0$ かつ $\beta = 0$，以外の解（例えば，$\alpha = 3$，$\beta = 1$ ）をもつため，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は 1 次従属である．

答　1 次従属

(2)　$\boldsymbol{a} = (3,\ 2)^T$，　$\boldsymbol{b} = (-5, -3)^T$

教科書 p.14 より

$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = (3\alpha, 2\alpha)^T + (-5\beta, -3\beta)^T$

$= (3\alpha - 5\beta, 2\alpha - 3\beta)^T$

$(3\alpha - 5\beta, 2\alpha - 3\beta)^T = (0,\ 0)^T$ と仮定し，この式を解くと，$\alpha = 0$ かつ $\beta = 0$ となる．

ゆえに，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立である．

答　1 次独立

問2：次のベクトル $\boldsymbol{a}$ を，1 次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1 = (5,\ 6)^T$，$\boldsymbol{a}_2 = (0,\ 8)^T$ の 1 次結合として表せ．

(1)　$\boldsymbol{a} = (5,\ 14)^T$

教科書 p.14 より，

$\boldsymbol{a}$が$\boldsymbol{a}_1$と$\boldsymbol{a}_2$の 1 次結合としてあらわせるならば，

$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2$　$(\alpha, \beta \in \boldsymbol{R})$ となる．　成分を比べて，$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 6\alpha + 8\beta = 14 \end{cases}$　よって $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$

したがって，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$

答　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$

(2)　$\boldsymbol{a} = (10, -4)^T$

教科書 p.14 より，

$\boldsymbol{a}$が$\boldsymbol{a}_1$と$\boldsymbol{a}_2$の 1 次結合としてあらわせるならば，

$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2$　$(\alpha, \beta \in \boldsymbol{R})$ とする．　成分を比べて，$\begin{cases} \alpha = 2 \\ 6\alpha + 8\beta = -4 \end{cases}$　よって $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -2 \end{cases}$

したがって，$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$

答　$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$

問3：2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ と，そのなす角 θ に関して，次の各問いに答えよ．

(1)　$\boldsymbol{a} = (1,\ 2)^T$，　$\boldsymbol{b} = (-1,\ 3)^T$ のとき，　θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を求めよ．

教科書 p.15 より，

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 \cdot -1 + 2 \cdot 3 = 5$

$\cos\theta = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{5}{\sqrt{1+4}\sqrt{1+9}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，　$\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$

答　$\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$

(2)　$\boldsymbol{a} = \left(3\sqrt{3},\ 3\right)^{\boldsymbol{T}}$，　$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき，　$\boldsymbol{b} = (x,\ y)^T$ を求めよ．ただし，$|\boldsymbol{b}| = 4$ とする．

教科書 p.14，15 より，

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = \sqrt{27+9}\cdot 4\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 12$

$\boldsymbol{b} = (x,y)^T$ とした場合に，　内積$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$とベクトルの大きさ$|\boldsymbol{b}|$から $\begin{cases} 3\sqrt{3}x + 3y = 12 & -① \\ \sqrt{x^2+y^2} = 4 & -② \end{cases}$

① の式から $y = ax + b$ に変形し，② の式に代入する．

② の両辺を 2 乗して，x の二次方程式にする．

$x^2 - 2\sqrt{3}x = 0$　　$-$③

③ の式の x の二次方程式を解くと，$\boldsymbol{b} = (0,4)^T$ または，$\boldsymbol{b} = \left(2\sqrt{3},-2\right)^T$

答　$\boldsymbol{b} = (0,4)^T$ または，$\boldsymbol{b} = \left(2\sqrt{3},-2\right)^T$

問4：次のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = (0,\ 0,\ 2)^{\boldsymbol{T}}$，$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{2}} = (1,\ 0,\ 1)^T$ について，シュミットの直交化法を用いて正規直交化したベクトル $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{1}} = (x_1, y_1, z_1)^{\boldsymbol{T}}$ ，$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{2}} = (x_2, y_2, z_2)^{\boldsymbol{T}}$ を求めよ．

教科書 p.15 の公式より，

$\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|} = \dfrac{(0,\ 0,\ 2)^T}{\sqrt{0+0+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}}(0,0,2)^T = (0,0,1)^T$

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1$ とおく．

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 = (1,0,1)^T - (0,0,1)^T = (1,0,0)^T$

$\boldsymbol{b}_2 = \dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$を解くと，

$\boldsymbol{b}_2 = \dfrac{\boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1|} = \dfrac{(1,0,1)^T - (0,0,1)^T}{|((1,0,1)^T - (0,0,1)^T)|} = \dfrac{(1,0,0)^T}{|(1,0,0)^T|} = \dfrac{(1,0,0)^T}{\sqrt{1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1}}(1,0,0)^T = (1,0,0)^T$

したがって，$\boldsymbol{b}_1 = (0,\ 0,\ 1)^T$，　$\boldsymbol{b}_2 = (1,0,0)^T$

答　$\boldsymbol{b}_1 = (0,0,1)^T$，　$\boldsymbol{b}_2 = (1,0,0)^T$